Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 15 октября 2009 г.

Второй тур. Лига стратегий

1. Вася и Петя по очереди выкладывают на единичный отрезок меньшие отрезки. Первым ходом Вася кладет отрезок длины $1/2$, а каждый следующий отрезок вдвое короче предыдущего. Выкладываемые отрезки не могут иметь общих внутренних точек и выходить за границы исходного отрезка. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

2. Две равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На меньшей дуге AB окружности ω_2 выбрана точка P. Прямая AP пересекает окружность ω_1 в точке C. Прямая CB пересекает большую дугу AB окружности ω_2 в точке D. Биссектриса угла CAD пересекает большую дугу AB окружности ω_2 в точке L. Точка F выбрана таким образом, что $CLPF$ — параллелограмм. Докажите, что на плоскости существует точка X, для которой $\angle LFX = \angle CDX = 30^\circ$ и $CX = PL$.

3. Внутри выпуклого многоугольника M выбрана точка A. Многоугольник M' получается из M параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Обозначим через r и r' максимальные расстояния от A до вершин многоугольников M и M' соответственно. Докажите неравенство $3r' \geqslant r + |\vec{v}|$.

4. Вершины графа G разбиты на несколько n-клик, называемых *слоями*. Простой цикл этого графа будем называть *важным*, если этот цикл содержит не более двух вершин из каждого слоя. Оказалось, что каждое ребро, соединяющее вершины из разных слоев, покрыто не более, чем $n-2$ важными нечетными циклами. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в n цветов правильным образом.

5. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена x^3-3x-1. Докажите, что $x_3^2-x_2^2 = x_3-x_1$.

6. Пусть $k \geqslant 10$ — такое число, что среди любых k последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными. Докажите, что произведение k последовательных натуральных чисел не может быть точной m-й степенью при $m \geqslant k+2$.

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

8. Клетчатая плоскость разбита на L-тетрамино. Докажите, что существует еще 16 таких разбиений плоскости на L-тетрамино, что никакие два тетрамино во всех этих 17 разбиениях не совпадают.

9. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны CD и DA равны. На сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно таким образом, что $\angle ADC = 2\angle EDF$. Отрезки DK и DM являются соответственно высотой и медианой треугольника DEF. Точка L симметрична точке K относительно точки M. Докажите, что прямые DM и BL параллельны.

10. Пусть n — натуральное число, а k — нечетное натуральное число. Целые числа a, b и c удовлетворяют соотношению

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Докажите, что $a = b = c$.